132 - Formes linéaires et hyperplans en dimension finie. Exemples et applications.

I) **<u>Dualité</u> [Gou] + [Cog]**

1) Espace dual, bases duales

Déf forme linéaire, espace dual, notation, bidual.

Déf : forme linéaire coordonnée, base duale.

Prop : isomorphisme entre E et E** en DF.

Déf : base antéduale

2) Orthogonalité

Déf : orthogonalité entre une forme lin éaire et un vecteur, définition de B^o, B orthogonal.

Résultats sur les dimensions

Equation d'un sev en DF

3) Hyperplans

Noyau d'une forme linéaire = hyperplan, réciproque vraie.

Méthode de Gauss : ça revient à faire un chgt de base dans le dual

Lorsqu'on a une équation de degré 2 sur un corps fini, et qu'on veut dénombrer les solutions, on peut essayer de ramener à l'équation d'un hyperplan. Exemple : pour montrer la LRQ, on veut dénombrer la « sphère unité de Fq » de deux manières différentes. On fait un chgt de variable pour passer de $\sum xi^2=1$ à une équation d'hyperplan.

Appl : LRQ

4) Exemples de formes linéaires

a) Intégrale

Ex : intégrale sur l'ensemble des polynômes de degré inférieur à n.

Le noyau est un hyperplan

b) Formes linéaires sur l'espace des matrices

Toutes de la forme tr(AX)

c) En calcul diff

La différentielle d'une appl R^n→R est une forme linéaire R^n→R.

Prop : une appl linéaire E→K^p est surjective ssi les coord sont linéairement indépendantes [Gou exo 1]

Appl : pour montrer qu'une application est une submersion…

II) **<u>Application transposée</u> [Gou] + [Cog]**

1) Application transposée

Quelques propriétés

Déf, résultats, HB, transposée

Stabilité d'hyperplan (très utile en réduction, on y reviendra)

Prop : la méthode de Gauss pour les formes quadratiques revient à faire un changement de base dans E*. Du moment qu'on a ce chgt de base dans le dual, on peut retrouver le chgt de base de l'espace E correspondant avec un diagramme.

2) Application : trigonalisation

Trigonalisation, trigonalisation simultanée

3) Application : invariants de similitude

III) Applications fixant un hyperplan

1) Réflexions et On(K)

Cartan

2) Transvections et SLn(K)

Générateurs de SLn(R). PSLn(K) est simple (n plus grand que 3)

IV) Dualité et analyse fonctionnelle [Tiss] + [Br]

1) Représentation de Riesz

Exemples de duaux : L^p

2) HB analytique

3) HB géométrique

Développements :
HB (géom ou analytique ?) (**) [Tauvel - Géométrie]
Générateurs SL(E) (**) [Per]

Bibliographie :
[Gourdon]
[Cognet]
[Analyse L3]

Rapport du jury : il est important de replacer la thématique de la dualité dans cette leçon. Les liens entre base duale et fonctions de coordonnées doivent être parfaitement connus. Savoir calculer la dimension d'une intersection d'hyperplans est au cœur de la leçon. L'utilisation des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes permet facilement d'obtenir les équations d'un sous-espace vectoriel ou d'exhiber une base d'une intersection d'hyperplans. Cette leçon peut être traitée sous différents aspects : géométrie, algèbre, topologie, analyse etc. Il faut que les développements proposés soient en lien direct, comme toujours, avec la leçon : proposer la trigonalisation simultanée est un peu osé ! Enfin rappeler que la différentielle d'une fonction réelle est une forme linéaire semble incontournable.